55、normale einfache Algebren ノ判別ニ関スル定理ノ一証明。

浅野啓三（阪大）

学士院記事 10、No. 4 ニ於テ正田先生ハ normal-einfach ナ多元環ノ判別条件ヲ発表サレマシタ(*) 若シコノ定理ガ初等的ニ証明サレルナラソレヲ最初ニモッテユクコトニヨッテ normale einfache Algebren ノ理論ガ相当簡単ニナルデアロウトノ御話デシタガ次ノ様ニ証明スルコトガ出来ルト思ヒマス。

今 $\mathfrak{r} = e_1K + e_2K + \cdots + e_nK$ ヲ K ノ上ノ多元環トシ

$$e_i(e_1, \dots, e_n)e_j = (e_1, \dots, e_n)E_i\overline{E}_j \quad (E_i\overline{E}_j = \overline{E}_jE_i)$$

トシマス。コヽニ $E_i, \overline{E}$ ハ夫々 e_i ノ reguläre 又ハ regiprok reguläre Darstellung トシマス。次ノ定理ヲ証明スレバイヽワケデス。

$\mathfrak{r}$ ガ normal einfach ナルタメ必要且充分ナ条件ハ n^2 個ノ Matrix $E_i\overline{E}_j$ ガ K ニ於テ一次独立ナルコトデアル。

コノ条件ヲ $e_ie_j = \sum_k e_k a_{ij}^k \ (a_{ij}^k \in K)$ ヲ用ヒテ書キカヘレバ

$$|d_{ij,pq}| \neq 0, \quad d_{ij,pq} = \sum_k a_{ip}^k a_{kj}^q$$

ガ判別条件ニナリマス。

証明、$\sum \alpha_{ij} E_i\overline{E}_j \ (\alpha_{ij} \in K)$ ノ全体ヨリナル Matrizensystem ヲ $\mathfrak{T}$ トシ、$\mathfrak{r}$ ト regiprok isomorph ナ K ノ上ノ多元環ヲ $\overline{\mathfrak{r}}$ トスレバ $\mathfrak{T}$ ハ明カニ $\mathfrak{r} \times \overline{\mathfrak{r}}$ ニ homomorph デアリマス、∴ $\mathfrak{r} \times \overline{\mathfrak{r}}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{T}$, $\mathfrak{a}$ ハ $\mathfrak{r} \times \overline{\mathfrak{r}}$ ノ Ideal デス。

(i) $\mathfrak{r}$ ガ normal-einfach ナラバ $\overline{\mathfrak{r}}$ モ同様、従ッテ $\mathfrak{r} \times \overline{\mathfrak{r}}$ ハ normal einfach デ上ノ $\mathfrak{a}$ ハ Nullideal, 即チ $\mathfrak{r} \times \overline{\mathfrak{r}} \cong \mathfrak{T}$. ∴ $E_i\overline{E}_j$ ハ一次独立デス。尚又 Matrix grad ハ n デスカラ $\mathfrak{T} = K_n$ ニナリマス。

(*) K. Shoda Ein Kriterium für normale einfache hyperkomplexe Systeme

(ii) $E_i\bar{E}_j$ ヲ独立トシマスト $\mathfrak{G}\times\bar{\mathfrak{G}}\cong\mathfrak{T}$, 且又 $\mathfrak{T}=K_n$、∴ $\mathfrak{G}\times\bar{\mathfrak{G}}$ ハ normal-einfach. 従ッテ $\mathfrak{G}$ ハ normal-einfach デナケレバナリマセン.

上ノ証明デハ normal-einfach ナ多元環ノ Direktes Produkt ガ又 normal-einfach ニナルコトヲ使ヒマシタ。コレハ Wedderburn ノ定理ニヨッテ結局二ツノ normal-einfach ナ Schiefkörper $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}'$ ノ Direktes Produkt ガ normal-einfach ニナルコトヲ云ヘバイヽワケデス.

$\mathfrak{k}=e_1K+\cdots+e_mK$ トスレバ $\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}'=e_1\mathfrak{k}'+\cdots+e_m\mathfrak{k}'$、$\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}'$ ガ Ideal $\mathfrak{a}\neq 0$ ヲモテバ $\mathfrak{a}$ ガ $\mathfrak{k}'$-Modul ナルコトカラ $e_1,\ldots,e_m$ ノ順序ヲ適当ニトッテ

$$\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}'=\mathfrak{a}+e_{\nu+1}\mathfrak{k}'+\cdots+e_m\mathfrak{k}'=e_1\mathfrak{k}'+\cdots+e_m\mathfrak{k}'$$

トナリマス. ∴ $\mathfrak{a}$ ト $e_1\mathfrak{k}'+\cdots+e_\nu\mathfrak{k}'$ ハ $\mathfrak{k}'$-isomorph デス. ヨッテ e_1 ニ対應スル $\mathfrak{a}$ ノ Element ヲ a トスレバ a ハ $\mathfrak{k}'$ ノ Element ト kommutativ デ $a\in\mathfrak{k}$ $1=aa^{-1}\in\mathfrak{a}$ 従ッテ $\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}'=\mathfrak{a}$ トナリマス.